Подход за решаване на транспортни задачи с М-метода

Миглена Иванова

An Approach to Solving Transport Problems through the M-Method

Miglena Ivanova

Abstract: *This paper presents an approach to solving transport problems by using the M-Method with optimal planning of freight wagon logistics. This method is applied in an example transport problem for minimizing empty mileage of open and covered freight wagons, considering their interchangeability and through overview of all combinations of interchangeable open and covered wagons in stations with a freight wagon shortage. The paper also presents an approach for probability analysis of two-dimensional discrete distribution (Crosstabs), generated by the SPSS program, including the optimal solutions of the stated problem which have been reached through the M-Method.*

Keywords: *Transport problems; freight wagons; M-Method; two-dimensional discrete distribution; SPSS.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Постановката на транспортната задача за прикрепването на пунктовете с недостиг към тези с излишък на празни вагони е следната [5]:

Ако с $a_k\ (k=1,2,...,m)$ се означи наличността на k–тата гара с излишък на празни вагони, с $b_r(r=1,2,...,n)$ – потребността на r–тата гара с недостиг на празни вагони, с l_{kr}– разстоянието в железопътни вагонкилометри между k–тата гара с излишък и r–тата гара с недостиг на празни вагони, с x_{kr}– броя на празните вагони, които k–тата гара с излишък трябва да отправи за задоволяване на r–тата гара с недостиг на празни вагони, то икономико-математическият модел [1; 2; 4; 7] на задачата може да се запише по следния начин:

$$\min\left\{L=\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} l_{kr}x_{kr}\right\},\quad \sum_{r=1}^{n} x_{kr}=a_k,\quad \sum_{k=1}^{m} x_{kr}=b_r,\quad x_{kr}\ge 0,\quad k=1,2,...,m; r=1,2,...,n.$$

Целевата функция на задачата L изразява необходимостта от постигането на минимална сумарна величина на празния пробег на вагоните, изразен във вагонкилометри.

Предполага се, че $\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{r=1}^{n} b_r$.

Означавайки разстоянията между гарите с излишък и недостиг $l_{11}\to l_1, l_{12}\to l_2,\dots,l_{1n}\to l_n$, $l_{21}\to l_{n+1}, l_{22}\to l_{n+2},\dots,l_{2n}\to l_p,\dots,l_{m1}\to l_{s+1}, l_{m2}\to l_{s+2},\dots,l_{mn}\to l_t$, а търсения брой на празните празни вагони $x_{11}\to x_1, x_{12}\to x_2,\dots,x_{1n}\to x_n, x_{21}\to x_{n+1}, x_{22}\to x_{n+2},\dots,x_{2n}\to x_p,\dots,x_{m1}\to x_{s+1}, x_{m2}\to x_{s+2},\dots,$ $x_{mn}\to x_t$, се получава следната задача на линейното оптимиране:

$$\min\left\{L=\sum_{j=1}^{t} l_j x_j\right\};\ \sum_{j=1}^{t} x_j=a_k,\ k=1,2,...,m;\ \sum_{j=1}^{t} x_j=b_r,\ r=1,2,...,n;\ x_j\ge 0,\ j=1,2,...,t.$$

Така формулираната задача на линейното оптимиране може да бъде решена с **М-метода** [1;2]. Нека **М** е достатъчно голямо положително число, тогава **М-задачата** има следния вид:

$$\min\left\{L = l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_tx_t + Mx_{t+1} + \ldots + Mx_{t+m} + Mx_{t+m+1} + \ldots + Mx_{t+m+n}\right\} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\begin{array}{llllll}
x_1 + x_2 + \ldots + x_n & & & + x_{t+1} & & = a_1 \\
& x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_p & & + x_{t+2} & & = a_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \\
& & x_{s+1} + x_{s+2} + \ldots + x_t & + x_{t+m} & & = a_m \\
x_1 & + x_{n+1} & + x_{s+1} & & + x_{t+m+1} & = b_1 \\
\quad x_2 & + x_{n+2} & + x_{s+2} & & + x_{t+m+2} & = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \\
\qquad x_n & + x_p & + x_t & & + x_{t+m+n} & = b_n
\end{array} \qquad \textbf{(2)}$$

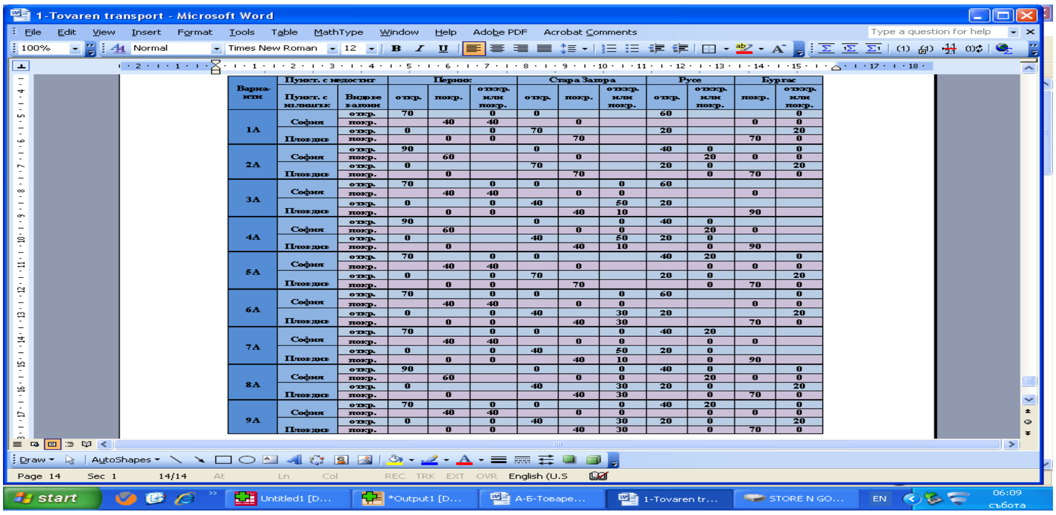
$$x_j \geq 0,\ \ j = 1,2,\ldots,n,n+1,n+2,\ldots,p,\ldots,s+1,s+2,\ldots,t,t+1,t+2,\ldots,t+m+n \qquad \textbf{(3)}.$$

Изложената теоретична постановка (1), (2) и (3) на транспортната задача за прикрепването на пунктовете с недостиг към тези с излишък на празни вагони позволява получаване на оптимално решение с **М-метода** на задачата за минимизиране на празния пробег на откритите и покритите товарни вагони с отчитане на взаимната им заменяемост. За да илюстрираме разработения подход с приложение на **М-метода,** ще разгледаме следната примерна транспортна задача за минимизиране на празния пробег на откритите и покритите товарни вагони с отчитане на взаимната им заменяемост:

Дадени са два пункта с излишък на открити и покрити вагони – *гарите София* и *Пловдив* – и четири пункта с недостиг на открити и покрити вагони, като два от тях – *гарите Перник* и *Стара Загора,* са пунктове с недостиг на открити и покрити вагони, *гара Русе* е пункт с недостиг само на открити вагони, а *гара Бургас* е пункт с недостиг само на покрити вагони. Разстоянията в железопътни вагонкилометри между гарите с излишък и недостиг са: *София–Перник* 33 км, *София–Стара Загора* 250 км, *София–Русе* 405 км, *София–Бургас* 418 км, *Пловдив–Перник* 189 км, *Пловдив–Стара Загора* 106 км, *Пловдив–Русе* 359 км, *Пловдив–Бургас* 294 км. За пунктовете с излишък и недостиг на разглежданата задача с отчитане на взаимната заменяемост е дадено, че: наличностите на пунктовете с излишък на вагони на *гара София* са 210 бр. (откр. 130 бр., покр. 80 бр.), на *гара Пловдив* са 250 бр. (откр. 110 бр., покр. 140 бр.); потребностите на пунктовете с недостиг на *гара Перник* са 150 бр. (откр. 90 бр., покр. 60 бр. / откр. 70 бр., покр. 40 бр., откр. или покр. 40 бр.), на *гара Стара Загора* са 140 бр. (откр. 70 бр., покр. 70 бр. / откр. 40 бр., покр. 40 бр., откр. или покр. 60 бр.), на *гара Русе* са 80 бр. (откр. 80 бр. / откр. или 60 бр., откр. или покр. 20 бр.), на *гара Бургас* са 90 бр. (покр. 90 бр. / покр. 70 бр., откр. или покр. 20 бр.).

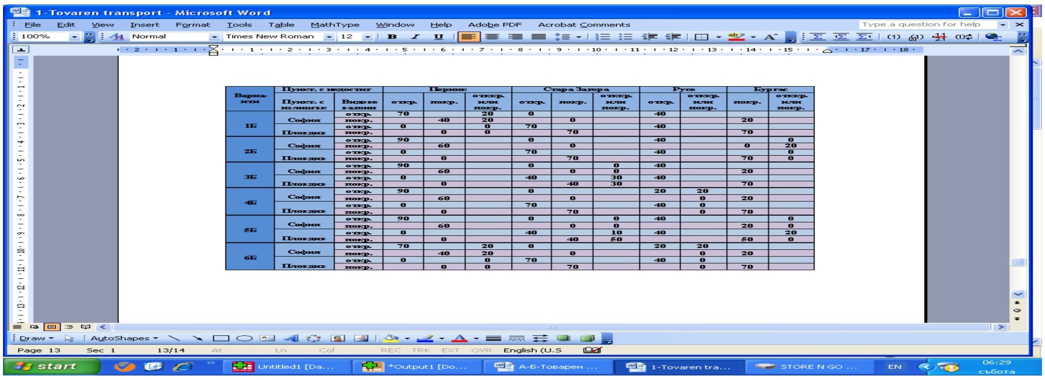
В настоящото изследване се илюстрира подход за решаване с **М-метода на** транспортната задача за минимизиране на празния пробег на откритите и покритите товарни вагони с отчитане на взаимната им заменяемост чрез разглеждане на всички комбинации от взаимно заменяеми открити или покрити вагони в пунктовете с недостиг на товарни вагони. За разглежданата задача пунктовете с недостиг на товарни вагони са четири – *Перник*, *Стара Загора*, *Русе* и *Бургас*. Всички комбинации от взаимно заменяеми открити или покрити вагони в пунктовете с недостиг на товарни вагони са **петнадесет**, от които: **шест** $C_4^2 = 6$ се получават, като в два от пунктовете с недостиг се включват открити или покрити вагони, **четири** $C_4^3 = 4$ се получават, като в три от пунктовете с недостиг се включват открити или покрити вагони, **един** $C_4^4 = 1$ се получава, като в четирите пункта с недостиг се включват открити или покрити вагони, **четири** $C_4^1 = 4$ се получават, като в един от пунктовете с недостиг се включват открити или покрити вагони. В таблица 1. и таблица 2. са показани матриците (всички комбинации от взаимно заменяеми открити или покрити вагони в пунктовете с недостиг на товарни вагони), с чието построяване се решават разглежданата задача и оптималните решения на всеки от петнадесетте варианта, получени с **М-метода**[1].

Таблица 1.



Варианти	Пункт. с недостиг		Перник			Стара Загора			Русе		Бургас	
	Пункт. с излишък	Видове вагони	откр.	покр.	откр. или покр.	откр.	покр.	откр. или покр.	откр.	откр. или покр.	покр.	откр. или покр.
1А	София	откр.	70		0	0			60			0
		покр.		40	40		0				0	0
	Пловдив	откр.	0		0	70			20			20
		покр.		0	0		70				70	0
2А	София	откр.	90			0			40	0		0
		покр.		60			0			20	0	0
	Пловдив	откр.	0			70			20	0		20
		покр.		0			70			0	70	0
3А	София	откр.	70		0	0		0	60			
		покр.		40	40		0	0			0	
	Пловдив	откр.	0		0	40		50	20			
		покр.		0	0		40	10			90	
4А	София	откр.	90			0		0	40	0		
		покр.		60			0	0		20	0	
	Пловдив	откр.	0			40		50	20	0		
		покр.		0			40	10		0	90	
5А	София	откр.	70		0	0			40	20		0
		покр.		40	40		0			0	0	0
	Пловдив	откр.	0		0	70			20	0		20
		покр.		0	0		70			0	70	0
6А	София	откр.	70		0	0		0	60			0
		покр.		40	40		0	0			0	0
	Пловдив	откр.	0		0	40		30	20			20
		покр.		0	0		40	30			70	0
7А	София	откр.	70		0	0		0	40	20		
		покр.		40	40		0	0		0	0	
	Пловдив	откр.	0		0	40		50	20	0		
		покр.		0	0		40	10		0	90	
8А	София	откр.	90			0		0	40	0		0
		покр.		60			0	0		20	0	0
	Пловдив	откр.	0			40		30	20	0		20
		покр.		0			40	30		0	70	0
9А	София	откр.	70		0	0		0	40	20		0
		покр.		40	40		0	0		0	0	0
	Пловдив	откр.	0		0	40		30	20	0		20
		покр.		0	0		40	30		0	70	0

Таблица 2.



Варианти	Пункт. с недостиг		Перник			Стара Загора			Русе		Бургас	
	Пункт. с излишък	Видове вагони	откр.	покр.	откр. или покр.	откр.	покр.	откр. или покр.	откр.	откр. или покр.	покр.	откр. или покр.
1Б	София	откр.	70		20	0			40			
		покр.		40	20		0				20	
	Пловдив	откр.	0		0	70			40			
		покр.		0	0		70				70	
2Б	София	откр.	90			0			40			0
		покр.		60			0				0	20
	Пловдив	откр.	0			70			40			0
		покр.		0			70				70	0
3Б	София	откр.	90			0		0	40			
		покр.		60			0	0			20	
	Пловдив	откр.	0			40		30	40			
		покр.		0			40	30			70	
4Б	София	откр.	90			0			20	20		
		покр.		60			0			0	20	
	Пловдив	откр.	0			70			40	0		
		покр.		0			70			0	70	
5Б	София	откр.	90			0		0	40			0
		покр.		60			0	0			20	0
	Пловдив	откр.	0			40		10	40			20
		покр.		0			40	50			50	0
6Б	София	откр.	70		20	0			20	20		
		покр.		40	20		0			0	20	
	Пловдив	откр.	0		0	70			40	0		
		покр.		0	0		70			0	70	

Варианти 1А, 2А, 3А, 4А, 5А, 6А, 7А, 8А, 9А имат еднаква сумарна величина на празния пробег на вагоните: $L\min = 77730$ вагонкилометра. Варианти 1Б, 2Б, 3Б, 4Б, 5Б, 6Б имат еднаква сумарна величина на празния пробег на вагоните: $L\min = 79290$ вагонкилометра. Сумарната величина на празния пробег на вагоните на задачата с отчитане на взаимната заменяемост на откритите и покрити вагони чрез разглеждане на всички комбинации от взаимно заменяеми открити или покрити вагони в пунктовете с недостиг на вагони е $L\min = 77730$ вагонкилометра, тъй като при нея се постига намаляване на сумарната величина на празния пробег на вагоните с 1560 вагонкилометра, респ. с 2% в сравнение със сумарната величина $L\min = 79290$. Оптималните решения на задачата с отчитане възможностите за ваимна заменяемост на откритите и покритите товарни вагони (получени с М-метода) са девет и това са оптималните решения на Варианти 1А, 2А, 3А, 4А, 5А, 6А, 7А, 8А и 9А (таблица 1.). Използвайки данните за разстоянията във вагонкилометри на петнадесетте варианта, можем да направим следния извод за всеки от двата *пункта с излишък на открити и покрити*: за Вариантите 1А, 2А, 3А, 4А двойките разстояния през четири стойности са равни, с изключение на две двойки, за Вариантите 5А, 6А, 7А, 8А, 5Б, 6Б двойките разстояния през пет стойности са равни, с изключение на две двойки, за Вариант 9А двойките разстояния през шест стойности са равни, с изключение на две двойки, за Вариантите 1Б, 2Б, 3Б, 4Б двойките разстояния през три стойности са равни, с изключение на две двойки. За петнадесетте варианта двете двойки разстояния, които не са с равни стойности, са едни и същи, а разстоянията не са равни, тъй като *гара Русе* е *пункт с недостиг само на открити* вагони, а *гара Бургас* е *пункт с недостиг само на покрити* вагони.

ВЕРОЯТНОСТЕН АНАЛИЗ НА ОПТИМАЛНИТЕ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧАТА ЗА ОТЧИТАНЕ ВЗАИМНАТА ЗАМЕНЯЕМОСТ НА ОТКРИТИТЕ И ПОКРИТИТЕ ВАГОНИ

За да направим вероятностен анализ на оптималните решения на разглежданата задача Варианти 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 7A, 8A и 9A (таблица 1.), ще разгледаме две дискретни случайни величини. Първата дискретна случайна величина $X=X_{ij}$ *Откр.ваг.Вар.А* включва оптималните решения от *пунктовете с излишък на Открити вагони* за *гарите София* и *Пловдив*, а втората дискретна случайна величина $X=X_{ij}$ *Покр.ваг.Вар.А* включва оптималните решения от двата *пункта с излишък на Покрити вагони*. Стойностите в тези променливи се въвеждат последователно за Варианти 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 7A, 8A и 9A, като се използва последният направен извод за двойките разстояния за всеки от двата *пункта с излишък на открити и покрити* вагони, тъй като на всяка двойка разстояния съответства двойка от оптимални решения, едното от които е от *пункта с излишък на Открити* вагони, а другото – от *пункта с излишък на Покрити* вагони. За целите на вероятностния анализ ще разгледаме съвместното разпределение на двете дискретни случайни величини, което се нарича [2; 6; 8] двумерна дискретна случайна величина ($X=X_{ij}$ *Откр.ваг.Вар.А*, $Y=X_{ij}$ *Покр.ваг.Вар.А*) със стойности двойките от оптимални решения в *пунктовете с излишък на Открити и Покрити вагони* за *гарите София* и *Пловдив*. Съответствието между възможните стойности на двумерната дискретна случайна величина и вероятностите, с които се приемат тези стойности, се нарича закон за разпределение (двумерно дискретно разпределение). Тъй като всички двойки стойности от оптимални решения на така дефинираната двумерната дискретна случайна величина са равно вероятностни, то двумерното им разпределение може да се генерира с програмата SPSS, чрез избиране на функциите [3] **Analyze** $\Rightarrow$ **Descriptive Statistics** $\Rightarrow$ **Crosstabs** $\Rightarrow$ **Row(s):** X_{ij} *Покр.ваг.Вар.А*, **Column(s):** X_{ij} *Откр.ваг.Вар.А* $\Rightarrow$ **Cell** $\Rightarrow$ **Counts: Observed, Percentages: Total**. За разглежданата задача двумерното разпределение на дискретната случайна величина, генерирано с програмата SPSS, е таблица 3. – **Crosstabs**. Всяка от двете едномерни дискретни величини се характеризира с т.нар. безусловен закон за разпределение, който е съответствие между стойностите на всяка от величините и съответните им вероятности [2, 4; 6; 7; 8]. Стойностите на едномерните дискретни величини $X=X_{ij}$ *Откр.ваг.Вар.А* и $Y=X_{ij}$ *Покр.ваг.Вар.А* са генерирани съответно във втори ред (x_i, $i=1,\dots,8$) и втори стълб (y_j, $j=1,\dots,8$) на таблица 3., а съответните им вероятности *в проценти* $p_{i/}$ и $p_{/j}$ са генерирани съответно в последния ред и последния стълб на таблица 3. Във всяка вътрешна клетка на таблица 3. са генерирани две числа: първото (Count) е равно на броя на еднаквите двойки оптимални решения, а второто (% of Total) е вероятността $p_{ij}= p(X=X_{ij}$ *Откр.ваг.Вар.А* $Y=X_{ij}$ *Покр.ваг.Вар.А*$)=\frac{m}{n}$ на сложното събитие, състояща се в съвместното осъществяване на двете събития, където m е броят на двойките (Count) за съответната клетка, а n е общия брой двойки (Count) за таблицата. Сумите $\sum_{i=1}^{8} p_{ij} = p_{i/}$ $(i=1,\dots,8)$ от p_{ij} по стълбове са вероятностите в безусловното разпределение на $X=X_{ij}$ *Откр.ваг.Вар.А*, а сумите $\sum_{i=1}^{8} p_{ij} = p_{/j}$ $(j=1,\dots,8)$ от p_{ij} по редове са вероятностите в безусловното разпределение на $Y=X_{ij}$ *Покр.ваг.Вар.А*.

Таблица 3.

Xij.Покр.ваг.Вар.A * Xij.Откр.ваг.Вар.A Crosstabulation

			Xij.Откр.ваг.Вар.A								
			0	20	30	40	50	60	70	90	Total
Xij. Покр. ваг. Вар.A	0	Count	39	15	0	3	0	3	0	0	60
		% of Total	38,23529411765%	14,70588235294%	,00000000000%	2,94117647059%	,00000000000%	2,94117647059%	,00000000000%	,00000000000%	58,82352941176%
	10	Count	0	0	0	0	3	0	0	0	3
		% of Total	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	2,94117647059%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	2,94117647059%
	20	Count	0	0	0	3	0	0	0	0	3
		% of Total	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	2,94117647059%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	2,94117647059%
	30	Count	0	0	3	0	0	0	0	0	3
		% of Total	,00000000000%	,00000000000%	2,94117647059%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	2,94117647059%
	40	Count	6	0	0	6	0	0	6	0	18
		% of Total	5,88235294118%	,00000000000%	,00000000000%	5,88235294118%	,00000000000%	,00000000000%	5,88235294118%	,00000000000%	17,64705882353%
	60	Count	0	0	0	0	0	0	0	3	3
		% of Total	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	2,94117647059%	2,94117647059%
	70	Count	4	2	0	0	0	0	3	0	9
		% of Total	3,92156862745%	1,96078431373%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	2,94117647059%	,00000000000%	8,82352941176%
	90	Count	2	1	0	0	0	0	0	0	3
		% of Total	1,96078431373%	,98039215686%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	,00000000000%	2,94117647059%
Total		Count	51	18	3	12	3	3	9	3	102
		% of Total	50,00000000000%	17,64705882353%	2,94117647059%	11,76470588235%	2,94117647059%	2,94117647059%	8,82352941176%	2,94117647059%	100,00000000000%

Използвайки данните от генерираното с програмата SPSS двумерно разпределение, ще направим вероятностен анализ на ненулевите решения на задачата. За тази цел ще изчислим условните вероятности, условните математически очаквания и условните дисперсии на ненулевите оптимални решения от съответните двойки за *пунктовете с излишък на Открити вагони* по формулите (4), (6), (8), (10), а за *пунктовете с излишък на Покрити вагони* по формулите (5), (7), (9), (11):

$$p_{i/}^{(j)} = p\left(X = x_i / Y = y_j\right) = \frac{p_{ij}}{p_{/j}} \text{ и } \sum_{i=1}^{n} p_{i/}^{(j)} = 1 \quad (j = 1,\dots,m) \qquad \textbf{(4)};$$

$$p_{/j}^{(i)} = p\left(Y = y_j / X = x_i\right) = \frac{p_{ij}}{p_{i/}} \text{ и } \sum_{j=1}^{m} p_{/j}^{(i)} = 1 \quad (i = 1,\dots,n) \qquad \textbf{(5)}$$

$$E\left(X = x_i / Y = y_j\right) = x_i p_{i/}^{(j)} \qquad \textbf{(6)};$$

$$E\left(Y = y_j / X = x_i\right) = y_j p_{/j}^{(i)} \qquad \textbf{(7)}$$

$$E\left(X / Y = y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i/}^{(j)} \qquad \textbf{(8)};$$

$$E\left(Y / X = x_i\right) = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{/j}^{(i)} \qquad \textbf{(9)}$$

$$\sigma^2\left(X = x_i / Y = y_j\right) = \left(x_i - E\left(X / Y = y_j\right)\right)^2 . p_{i/}^{(j)} \qquad \textbf{(10)};$$

$$\sigma^2\left(Y = y_j / X = x_i\right) = \left(y_j - E\left(Y / X = x_i\right)\right)^2 . p_{/j}^{(i)} \qquad \textbf{(11)}.$$

Условната дисперсия служи като мярка на разсейването около условното математическо очакване. Условните вероятности, условните математически очаквания и условните дисперсии за ненулевите оптимални решения в *пунктовете с излишък на Открити* и *Покрити вагони* са дадени в зависимост от разпределението им в четирите *пункта с недостиг на вагони* в последните три колони на таблица 4. (за *пунктовете с недостиг на открити и покрити вагони*) и таблица 5. (за *пунктовете с недостиг на взаимнозаменяеми открити или покрити вагони*). От таблица 3. можем да направим извод, че има двойки с две ненулеви оптимални решения и с едно ненулево оптимално решение. Условните вероятности, условните математически очаквания и условните дисперсии на ненулевите оптимални решения за двойките с две и с едно ненулево решение в *пунктовете с излишък на Открити вагони* и *Покрити вагони* (таблица 4. и таблица 5.), за които броят на вариантите за съответната двойка (в които е включено ненулево решение) от таблица 1 е равен на броя на честотите за съответна двойка, се изчисляват чрез вероятностите p_{ij} от таблица 3. Има три двойки стойности $(20,0)$, за които броят на вариантите (от таблица 1.) за съответната двойка не е равен на броя на честотите, и те са: първа двойка – пункт с *излишък на открити вагони София* и с *недостиг на открити или покрити вагони Русе* (три варианта), втора – пункт с *излишък на открити вагони Пловдив* и с *недостиг на открити вагони Русе* (шест варианта), трета – пункт с *излишък на открити вагони Пловдив* и с *недостиг на открити вагони или покрити вагони Бургас* (шест варианта). От таблица 3. можем да определим, че общият брой на еднаквите двойки стойности $(20,0)$ е петнадесет. Тогава за първото оптимално решение на първата двойка стойности – Варианти 5A, 7A и 9A (таблица 5.) – условната вероятност е:

$$p_{2.2/}^{(1)} = p\left(x_2 = 20\,\text{отк.}\left(\text{отк. или пок.}\right) / y_1 = 0\,\text{пок.}\right) = \frac{3/102}{60/102} = 0,05\ ,$$

а условното математическо очакване и дисперсия са:

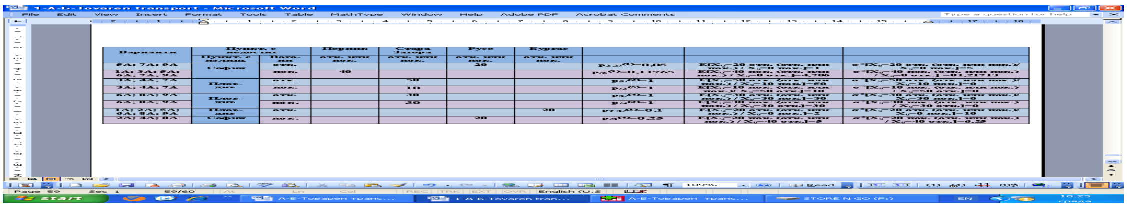
$$E\left(x_2 = 20\,\text{отк.}\left(\text{отк. или пок.}\right) / y_1 = 0\,\text{пок.}\right) = 20.0,05 = 1\,,\ \sigma^2\left(x_2 = 20\,\text{отк.}\left(\text{отк. или пок.}\right) / y_1 = 0\,\text{пок.}\right) = \left(20 - E\left(X / y_1 = 0\right)\right)^2.0,05 = 5\,,$$

където $E\left(X / y_1 = 0\right) = x_1.p_{1/}^{(1)} + x_2.p_{2/}^{(1)} + x_4.p_{4/}^{(1)} + x_6.p_{6/}^{(1)} = 0.0,65 + 20.0,25 + 40.0,05 + 60.0,05 = 10$.

Таблица 4.

Варианти	Пункт. с недостиг: Пункт. с излишък	Вагони	Перник отк.	Перник пок.	Стара Загора отк.	Стара Загора пок.	Русе отк.	Бургас пок.			
1A; 3A; 5A; 6A; 7A; 9A	София	отк.	70						$p_{7/}^{(5)}=1/3$	E[X_{ij}=70 отк./ X_{ij} =40 пок.]=70/3	σ^2[X_{ij}=70 отк./X_{ij} =40 пок.]=370,371851
1A; 3A; 5A; 6A; 7A; 9A		пок.		40					$p_{/5}^{(7)}=0,67$	E[X_{ij}=40 пок./ X_{ij}=70 отк.]=26,8	σ^2[X_{ij}=40 пок. / X_{ij}=70 отк.]=65,6667
2A; 4A; 8A	София	отк.	90						$p_{8/}^{(6)}=1$	E[X_{ij}=90 отк./ X_{ij}=60 пок.]=90	σ^2[X_{ij}=90 отк. / X_{ij}=60 пок.]=0
2A; 4A; 8A		пок.		60					$p_{/6}^{(8)}=1$	E[X_{ij}=60 пок./ X_{ij}=90 отк.]=60	σ^2[X_{ij}=60 пок. / X_{ij}=90 отк.]=0
1A; 2A; 5A	Плов-див	отк.			70				$p_{7/}^{(7)}=1/3$	E[X_{ij}=70 отк./ X_{ij} =70 пок.]=70/3	σ^2[X_{ij}=70 отк./X_{ij}= 70 пок.]=594,240872
1A; 2A; 5A		пок.				70			$p_{/7}^{(7)}=0,33$	E[X_{ij}=70 пок./ X_{ij}=70 отк.]=21,3	σ^2[X_{ij}=70 пок. /X_{ij}=70 отк.]=133,3233
3A; 4A; 6A; 7A; 8A; 9A	Плов-див	отк.			40				$p_{4/}^{(5)}=1/3$	E[X_{ij}=40 отк./ X_{ij} =40 пок.]=70/3	σ^2[X_{ij}=40 отк./X_{ij} = 40 пок.]=3,703851
3A; 4A; 6A; 7A; 8A; 9A		пок.				40			$p_{/5}^{(4)}=0,5$	E[X_{ij}=40 пок./ X_{ij}=40 отк.]=20	σ^2[X_{ij}=40 пок. / X_{ij}=40 отк.]=112,5
1A; 6A	Плов-див	отк.					20		$p_{2/}^{(7)}=2/9$	E[X_{ij}=20 отк./ X_{ij} =70 пок.]=40/9	σ^2[X_{ij}=20 отк./X_{ij} = 70 пок.]=13,442803
1A; 6A		пок.						70	$p_{/7}^{(2)}=0,111$	E[X_{ij}=70 пок./ X_{ij}=20 отк.]=7,77	σ^2[X_{ij}=70 пок. /X_{ij}=20 отк.]=363,04727
3A	Плов-див	отк.					20		$p_{2/}^{(8)}=0,333$	E[X_{ij}=20 отк./ X_{ij}=90 пок.]=6,66	σ^2[X_{ij}=20 отк. /X_{ij}=90 пок.]=59,25921
3A		пок.						90	$p_{/8}^{(2)}=0,056$	E[X_{ij}=90 пок./ X_{ij}=20 отк.]=5,04	σ^2[X_{ij}=90 пок. /X_{ij}=20 отк.]=333,66458
2A; 4A; 5A; 7A; 8A; 9A	Плов-див	отк.					20		$p_{21/}^{(1)}=0,1$	E[X_{ij}=20 отк. / X_{ij}=0 пок.]=2	σ^2[X_{ij}=20 отк. / X_{ij}=0 пок.]=10
4A; 7A		пок.						90	$p_{/8}^{(1)}=0,03922$	E[X_{ij}=90 пок./X_{ij}=0 отк.]=3,5298	σ^2[X_{ij}=90 пок. / X_{ij}=0 отк.]=228,1717
1A; 3A; 6A	София	отк.					60		$p_{6/}^{(1)}=0,05$	E[X_{ij}=60 отк./ X_{ij}=0 пок.]=3	σ^2[X_{ij}=60 отк. / X_{ij}=0 пок.]=125
2A; 5A; 6A; 9A	Плов-див	пок.						70	$p_{/7}^{(1)}=0,07843$	E[X_{ij}=70 пок./ X_{ij}=0 отк.]=5,4901	σ^2[X_{ij}=70 пок. / X_{ij}=0 отк.]=248,37011
5A; 7A; 9A	София	отк.					40		$p_{4/}^{(1)}=0,05$	E[X_{ij}=40 отк./ X_{ij}=0 пок.]=2	σ^2[X_{ij}=40 отк. / X_{ij}=0 пок.]=45
2A; 4A; 8A		отк.					40		$p_{4/}^{(3)}=1$	E[X_{ij}=40 отк./ X_{ij}=20 пок.]=40	σ^2[X_{ij}=40 отк. / X_{ij}=20 пок.]=0

Таблица 5.



Варианти	Пункт. с недостиг: Пункт. с излишък	Вагони	Перник отк. или пок.	Стара Загора отк. или пок.	Русе отк. или пок.	Бургас отк. или пок.			
5A; 7A; 9A	София	отк.			20		$p_{22/}^{(1)}=0,05$	E[X_{ij}=20 отк. (отк. или пок.) / X_{ij}=0 пок.]=1	σ^2[X_{ij}=20 отк. (отк. или пок.)/ X_{ij}=0 пок.]=5
1A; 3A; 5A; 6A; 7A; 9A		пок.	40				$p_{/5}^{(1)}=0,11765$	E[X_{ij}=40 пок. (отк. или пок.) / X_{ij}=0 отк.]=4,706	σ^2[X_{ij}=40 пок. (отк. или пок.) / X_{ij}=0 отк.] =81,21713
3A; 4A; 7A	Плов-див	отк.		50			$p_{5/}^{(2)}=1$	E[X_{ij}=50 отк. (отк. или пок.) / X_{ij}=10 пок.]=50	σ^2[X_{ij}=50 отк. (отк. или пок.)/ X_{ij}=10 пок.]=0
3A; 4A; 7A		пок.		10			$p_{/2}^{(5)}=1$	E[X_{ij}=10 пок. (отк. или пок.)/ X_{ij}=50 отк.]=10	σ^2[X_{ij}=10 пок. (отк. или пок.) / X_{ij}=50 отк.]=0
6A; 8A; 9A	Плов-див	отк.		30			$p_{3/}^{(4)}=1$	E[X_{ij}=30 отк. (отк. или пок.) / X_{ij}=30 пок.]=30	σ^2[X_{ij}=30 отк. (отк. или пок.)/ X_{ij}=30 пок.]=0
6A; 8A; 9A		пок.		30			$p_{/4}^{(3)}=1$	E[X_{ij}=30 пок. (отк. или пок.) / X_{ij}=30 отк.]=30	σ^2[X_{ij}=30 пок. (отк. или пок.) / X_{ij}=30 отк.]=0
1A; 2A; 5A; 6A; 8A; 9A	Плов-див	отк.				20	$p_{23/}^{(1)}=0,1$	E[X_{ij}=20 отк. (отк. или пок.) / X_{ij}=0 пок.]=2	σ^2[X_{ij}=20 отк. (отк. или пок.)/ X_{ij}=0 пок.]=10
2A; 4A; 8A	София	пок.			20		$p_{/3}^{(4)}=0,25$	E[X_{ij}=20 пок. (отк. или пок.) / X_{ij}=40 отк.]=5	σ^2[X_{ij}=20 пок. (отк. или пок.) / X_{ij}=40 отк.]=6,25

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

От направения вероятностен анализ (таблица 4. и таблица 5.) на ненулевите оптимални решения (получени с М-метода) в пунктовете с излишък на открити и покрити вагони в зависимост от разпределението им в четирите пункта с недостиг на вагони можем да направим следните изводи: четири ненулеви оптимални решения в пунктовете с излишък и недостиг на открити вагони (таблица 4.) и седем ненулеви оптимални решения в пунктовете с излишък и недостиг на покрити вагони (таблица 4.) имат голямо разсейване около условните си математически очаквания, само едно ненулево оптимално решение в пункт с излишък на покрити вагони и с недостиг на взаимнозаменяеми открити или покрити вагони (таблица 5.) има голямо разсейване около условното си математическо очакване.

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Бонев, К., Н. Стойнова-Пенкова, С. Борисова, П. Петров.** Математически методи и модели в икономиката. Книгоиздателство „Георги Бакалов“, Варна, 1983. // **Bonev K., N. Stoynova-Penkova, S. Borisova, P. Petrov.** Matematicheski metodi i modeli v ikonomikata. Knigoizdatelstvo „Georgi Bakalov”, Varna, 1983.

[2] **Велев, Г., М. Димитров, М. Христова, С. Пъдевска.** Висша математика в примери и задачи. УИ „Стопанство“, София, 1992. // **Velev G., M. Dimitrov, M. Hristova, S. Padevska.** Vissha matematika v primeri i zadachi. UI „Stopanstvo”, Sofia, 1992.

[3] **Гоев, В.** Статистическа обработка и анализ на информацията от социологически, маркетингови и политически изследвания със SPSS. Университетска печатница на УНСС, София, 1996. // **Goev V.**

Statisticheska obrabotka i analiz na informatsiyata ot sotsiologicheski, marketingovi i politicheski izsledvania sas SPSS. Universitetska pechatnitsa na UNSS, Sofia, 1996.

[4] **Иванова, М., М. Й. Иванова, И. Иванов.** Математика II примерни тестове за самоподготовка на студенти в икономическите висши учебни заведения. Издателски комплекс-УНСС, София, 2019. // Ivanova M., M. Y. Ivanova, I. Ivanov. Matematika II primerni testove za samopodgotovka na studenti v ikonomicheskite visshi uchebni zavedenia. Izdatelski kompleks-UNSS, Sofia, 2019.

[5] **Мутафчиев, Л., Е. Василев.** Икономико-математически методи и модели в транспорта. УИ „Стопанство“, София, 1999. // Mutafchiev L., E. Vasilev. Ikonomiko-matematicheski metodi i modeli v transporta. UI „Stopanstvo“, Sofia, 1999.

[6] **Сугарев, З., С. Каменаров.** Теория на вероятностите. Издателство „Наука и изкуство“, София, 1979. // Sugarev Z., S. Kamenarov. Teoria na veroyatnostite. Izdatelstvo „Nauka i izkustvo“, Sofia, 1979.

[7] **Тодоров, Д.** Математика. Университетска печатница УНСС, София, 2009. // Todorov D. Matematika. Universitetska pechatnitsa UNSS, Sofia, 2009.

[8] **Узунов, М.** Ръководство по теория на вероятностите. УИ „Стопанство“, София, 1998. // Uzunov M. Rakovodstvo po teoria na veroyatnostite. UI „Stopanstvo“, Sofia, 1998.

ИНФОРМАЦИЯ ЗА АВТОРА

Миглена Иванова – главен асистент, доктор, катедра „Математика“, факултет „Приложна информатика и статистика“, УНСС, гр. София, e-mail: ivanova_mg@abv.bg

ABOUT THE AUTHOR

Miglena Ivanova – Senior Lecturer, PhD, Faculty of Applied Informatics and Statistics, University of National and World Economy of Sofia, Bulgaria, E-mail: ivanova_mg@abv.bg