



DOI: 10.54664/BCSG2340

ПРОЕКТНО-БАЗИРАНО ОБУЧЕНИЕ С ИНТЕГРИРАНЕ НА ПРОГРАМИ И ПРИЛОЖЕНИЯ С ИЗКУСТВЕН ИНТЕЛЕКТ В ГИМНАЗИАЛЕН ЕТАП НА ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

Паунка Йорданова

PROJECT-BASED LEARNING INTEGRATING AI PROGRAMS AND APPLICATIONS IN SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS

Paunka Yordanova

Abstract: The paper presents a Project-Based Learning approach in Mathematics, integrated with artificial intelligence applications, implemented at Vasil Drumev Natural Science and Mathematics Secondary School, Veliko Tarnovo, during the 2024/2025 school year. The method was applied across two groups: the first stage of secondary education (innovative subject: Applied Mathematics) and second stage (Higher-Level Mathematics: Module 1 Geometry).

The dynamic geometry software GeoGebra was utilized in the development of the majority of the projects. This report describes the objectives, tasks, and stages of project assignment and implementation for both groups. Following an analysis of the results, a qualitative assessment of the method is provided.

The conclusions indicate that this approach fosters a creative environment, granting students the freedom to explore, experiment, and generate innovative ideas. Consequently, this increases student engagement and overall satisfaction with the educational process.

Keywords: project-based learning (PBL), mathematics education, AI integration, educational method, high school education.

ВЪВЕДЕНИЕ

Обучението по математика за ученици от гимназиален етап е в процес на адаптация към динамичните технологични изменения на съвременното общество. Промени се изискват в цялостния образователен подход на учителя към обучаемите, но преди всичко в преосмисляне и преформулиране на основополагащите понятия в методиката на обучение – цели, методи, задачи.

Профил на съвременния ученик, умения за работа с продукти на съвременните технологии

През 90-те години Улиям Щраус и Нийл Хауи стигат до заключението, че раждането в определен период предопределя уменията, мисленето, ценностите и поведението на хората. Приблизително на всеки петнадесет, двадесет години, в училищата влизат ученици от ново поколение със своите очаквания, поведение и ценности, оформени от уникалните обстоятелства на времето – политически, икономически, социални, технологични, правни и екологични фактори. С тези деца идват нови предизвикателства и нова перспектива пред образованието, за да бъде то адекватно на техните нужди и да успее да ги подготви за бъдещето. Обучаващите се в гимназиален етап днес не познават аналоговия свят, те израстват изцяло в 21. век, под знака на дигиталните технологии [2]. Това поколение е свикнало да получава от интернет мултимедийна информация

чрез интерактивни електронни устройства и подсъзнателно изгражда очаквания, че поднасянето на учебния материал в училище се осъществява по същия начин – на кратки визуализирани порции, подходящи за бързо и лесно усвояване на новата информация и интегрирането ѝ в системата от знания и индивидуалните потребности на всеки ученик. В случаите, когато тези очаквания не бъдат оправдани, учениците често бързо губят интерес към учебния процес. Затова е наложително, чрез масово и ефективно използване на информационно и комуникационно базирани иновационни образователни технологии и дидактически модели да се адаптира образователната система към дигиталното поколение, т.е. да се извърши дигитална трансформация на тази система [1]. Това неизменно поражда необходимост от изменение на образователния подход на учителя, съобразен с потребностите на учениците в училище, с цел по-ефективна комуникация учител-ученик и по-високи образователни резултати, насочени към функционалност на знанията и тяхната практико-приложимост.

ПБО по математика в съвременното училище

Проектно-базирано обучение е педагогически подход, който помага на учениците да задълбочат познанията си и да приложат математическите концепции в реални житейски ситуации чрез създаване на математически модели. В рамките на този подход те активно изследват, планират и решават проблеми, като процесът е по-важен от крайния резултат. Учениците споделят идеи и ресурси, развиват комуникационни и сътруднически умения, както и критично и креативно мислене. Проектно-базираното обучение се основава на задачи, свързани с реалния свят, което повишава мотивацията и ангажираността на учениците. Те получават обратна връзка от учители и връстници, а в края на проекта представят откритията си пред публика, което прави обучението по смислено и автентично. Проектното обучение помага да се преодолее сухото механично учене и мотивира учениците чрез ангажиране с реални практически задачи, подобрявайки тяхната учебна активност, подготвя ги за бъдещи професионални и житейски предизвикателства. [9]

Използване на програми и приложения с изкуствен интелект в обучението – предимства и недостатъци

Бързото разпространение на програмите с изкуствен интелект (LLM – large language model, голям езиков модел) трансформира значително образователния процес като се наблюдават, както положителни, така и отрицателни влияния върху обучаемите. В положителен аспект LLM имат голям потенциал за насърчаване на самообучението, повишаване на ангажираността на учениците и подпомагане на различни стилове на учене чрез адаптивно доставяне на съдържание. Въпреки това, новопоявяващите се изследвания споделят негативни прогнози относно когнитивните последици от широкото използване на LLM. Проучванията показват, че докато тези системи намаляват непосредственото когнитивно натоварване, те могат едновременно да намалят способностите за критично мислене и да доведат до намалена ангажираност в задълбочени аналитични процеси както и, че взаимодействието с AI (Artificial Intelligence, изкуствен интелект) системи може да доведе до намаляване на способностите за независимо решаване на проблеми. Тази тенденция поражда тревога относно дългосрочните последици за човешкото интелектуално развитие и автономност [1, 10].

Трансформацията на традиционните методи за търсене на информация в интернет пространството и замяната им с търсачки с вграден изкуствен интелект добавя допълнителна сложност в ученето. За разлика от конвенционалните търсачки, които представят разнообразни гледни точки за оценка от потребителя, LLM предоставят синтезирани, единствени отговори, които могат неволно да обезсърчат независимата преценка. Тази промяна от активно търсене на информация към пасивно потребление на генерирано от AI съдържание може да има дълбоки последици за начина, по който настоящите и бъдещите поколения обработват и оценяват информацията. Решението е в управлението на процеса на интегриране на програми и приложения с изкуствен интелект от страна на учителя чрез конкретизиране на задачите, които да се изпълнят с тези програми и приложения при ясно дефинирани критерии за изпълнение към учениците и проследяване на процеса периодично и индивидуално. [4, 5, 8]

Описание на програмите и приложенията, които са използвали учениците, за да реализират проектите си

1. GeoGebra – динамична геометрична програма за чертане, предназначен за обучение и преподаване на математика. Основните характеристики на софтуера включват построяване и визуализация на геометрични обекти и интерактивни конструкции, както и установяване на съответствие между алгебрични изрази и геометрични фигури и изследване на свойствата и тяхната взаимосвързаност. [15]
2. Perplexity.ai – приложение с изкуствен интелект, специализирано в търсенето, извличането, обобщаване и предоставянето на информация с научна и фактическа достоверност. При търсенето се използват усъвършенствани езикови модели (GPT-5 и Claude-Sonnet 4), които разбират сложния контекст на заявките и извличат данни от множество надеждни източници в реално време (бази данни като Scopus, Web of science и др.). Предоставя контекстуални отговори, цитира източниците си, което дава възможност на потребителя да провери достоверността на получената информация. [16]
3. ChatGPT, Claude, BGGPT (LLM) – три от най-известните в България и мощни големи езикови модели, чатботове с изкуствен интелект. [12, 13, 14]
4. Gemini (Google DeepMind) – мултимодален модел с изкуствен интелект, разработен от Google DeepMind. Използва се за търсене, анализ и синтез на информация от различни източници в реално време. Интегрирането му в екосистемата на Google позволява на потребителя да провери достоверността на получената информация чрез директна препратка към първоизточниците. Подходящ е за изследователска работа по избрана тема, като предоставя контекстуални отговори, съобразени с конкретната формулировка на запитването. [6]

Таблица 1. Кратко описание на трите най-популярни LLMs – модел, създател, основна цел [5]

Модел	Създател	Основна цел
ChatGPT	Open AI	Гъвкав модел, обучен да изпълнява широк спектър от задачи – писане, кодиране, генериране на изображения и видео. Поддържа силна интеграция с външни приложения.
Claude	Anthropic	Фокус върху безопасността, етиката и работата с голям обем от текст. Счита се, че е по-добър в решаването на логически задачи и обобщаване на дълги документи. По-малко склонен към генериране на неверни факти (халюцинации).
BgGPT	INSAIT	Специално обучен върху над три милиарда български изречения, разбира нюансите локалните изрази и специфичния български контекст по добре от международните модели. По-добър за задачи, които изискват познаване на българската действителност, история, администрация и култура. Не е собственост на чужда корпорация и има за цел да подпомага българското образование, бизнес и администрация.
Gemini	Google DeepMind	Приложение, интегрирано в екосистемата на Google. Поддържа работа с текст, изображения, аудио и видео. Отличава се с директна връзка с инструменти като Google Search, Google Docs и Gmail, което го прави особено подходящ за изследователска работа и събиране на актуална информация от интернет в реално време.

Общи недостатъци на LLMs (ChatGPT, Claude, BgGPT)

Това са фундаментални ограничения, произтичащи от начина, по който работят тези модели:

1. Халюцинации (генериране на неверни факти) – моделите могат да генерират правдоподобно звучащи, но напълно неверни, измислени или безсмислени отговори. Това е най-голе-

мият им недостатък. Те не „знаят“ или „разбират“ истината; те просто предсказват най-вероятната следваща дума въз основа на данните, с които са обучени.

2. Липса на актуални познания (Cut-off Date) – познанията им са ограничени до датата, до която са обучени (т.нар. „cut-off date“). Те не могат да знаят за събития, случили се след тази дата, освен ако не използват функция за уеб търсене (както правят някои от платените версии).

3. Липса на здрав разум и разсъждение – те не мислят, не осъзнават и не разбират света като хората. Те са изключително добри в разпознаването на езикови модели, но се затрудняват със задачи, които изискват истинско логическо разсъждение или здрав човешки разум.

4. Чувствителност към формулировката на запитването (Prompt) – много малка промяна във въпроса (запитването) може да доведе до драстично различен и дори грешен отговор [8].

ИЗЛОЖЕНИЕ

Цели и задачи на изследването

Цели

1. Да се развият умения за анализ, аргументиране, мотивация и доказателствено и креативно мислене.

2. Да се осъществи контролирано пренасочване на дигиталните умения на учениците за работа с програми и приложения с изкуствен интелект и динамичната програма за чертане GeoGebra за визуализиране на процеси и съставяне на математически модели;

3. Да се усъвършенстват компетентностите на учениците за разбиране и ползване на математическия език, както и уменията за работа с графики и данни при съставяне на математическите модели;

4. Да се формира положителна нагласа към ученето и да се отработи умението за устойчивост при неуспех, така че да се трансформира към желание за развитие и растеж чрез знанията, придобити по математика. [5, 7]

Задачи

1. Да се повиши мотивацията за работа на учениците в часовете по математика и да се преобразува процеса на придобиване на знания от задължение към интересна и удовлетворяваща дейност;

2. Да се спомогне за преодоляване на когнитивното претоварване и на усещането за липса на връзка между теория и практика;

3. Да се насърчи развитието на функционална грамотност на учениците, което да замени механичното заучаване и възпроизвеждане на знания. [3, 7]

Обект на изследването

Обект на изследването са две групи ученици, обучаващи се съответно в първи и втори гимназиален етап в паралелки с профилиращ предмет математика. Към всяка от групите е поставена задача – да разработят проект, описващ решението на практическа математическа задача. Инструкциите към първата група (втори гимназиален етап) не съдържат приложение на програми с изкуствен интелект, а втората група изгражда и описва проекта си чрез предварително регламентирано активно използване на програми и приложения с изкуствен интелект. Двете групи имат предварителни познания и използват динамичната геометрична програма GeoGebra.

Етапи на реализиране на поставените цели и произтичащите от тях задачи. Дейности на учителя при запознаване на учениците с изискванията към проекта

Първа група – ученици от втори гимназиален етап

Предварителен етап:

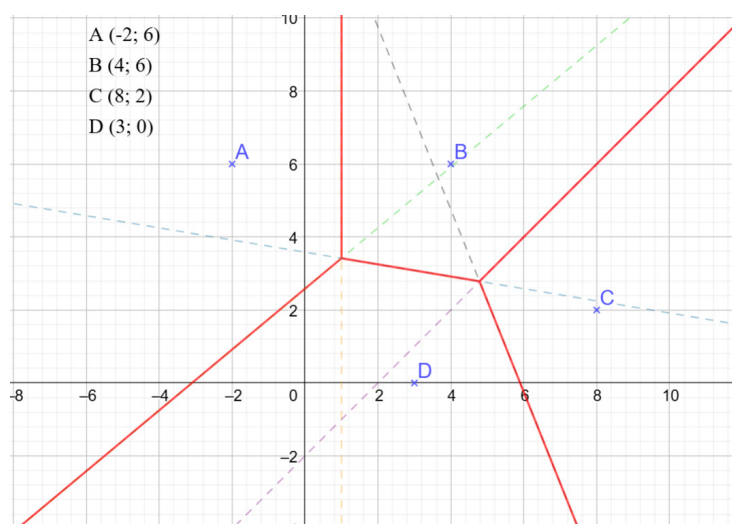
Запознаване на учениците с темата „Диаграми на Вороной и тяхното приложение в реалния живот“. Средствата, които се използват в този етап са обучителни видеа и решаване на система

от задачи, която обхваща овладяването на метода по изграждане на диаграма на Вороной върху даден терен чрез GeoGebra.

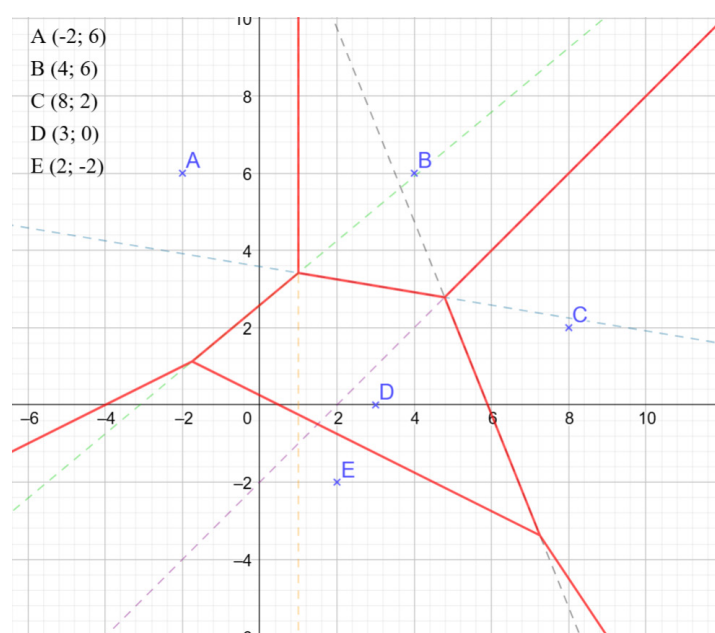
Диаграми на Вороной – метод на построение и предназначение

Диаграмите на Вороной са математически начин за разделяне на равнината на участъци (така наречените клетки (cells)) въз основа на разстоянието до определен набор от точки, наречени центрове (seeds). Очертанията на клетките се определят от симетралите на отсечките, определени от центровете. При по-голям брой точки, клетките са с формата на многоъгълници (*Фигури 1, 2 и 3*). Всяка клетка е участък, в който всички точки се намират на по-близко разстояние от центъра на дадената клетка, отколкото от центровете на другите клетки. Точките, разположени по ръбовете на клетките са разположени на равни разстояния от два центъра.

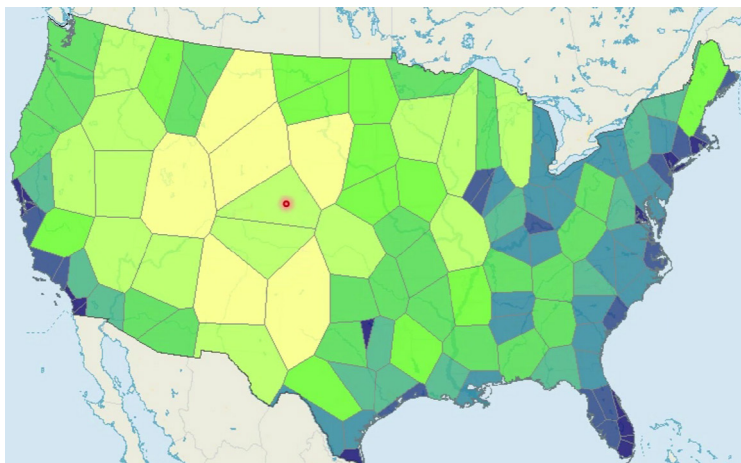
Диаграмите на Вороной намират широко приложение в изкуството (например при изработване на витражи), архитектурата, логистиката (за определяне на най-добро местоположение на нова болница, училище, пожарна и др.). Използват се също в компютърната графика и в безжичните мрежи. Те могат да бъдат открити и като модел в природата – шарките на жирафа, крилата на водните кончета и др.



Фигура 1. Диаграма на Вороной за четири точки в равнината



Фигура 2. Диаграма на Вороной за пет точки в равнината



Фигура 3. Регион (земна площ) с много центрове, разделен на клетки чрез диаграми на Вороной [11]

Описание на заданието: Изготвяне на проект на тема „Приложение на вектори и знания от аналитичната геометрия чрез диаграми на Вороной в реалния живот“ подтема „Диаграми на Вороной за/при“.

Предмет и предметна област: Модул 1 „Геометрия“ от профилираната подготовка по математика във втори гимназиален етап на средното образование.

Основни етапи при разработване на проекта:

I етап: Подготвителен

1. Да се формулира подтема на проекта, като се избира от областите на интереси – индивидуално за всеки ученик (проектите не са групови, а са индивидуални). Допълнително изискване – не трябва да има повтарящи се теми.
2. Да се избере населено място/квартал.
3. Да се използва подходящо приложение, за да се направи снимка на избраното място (на пример сателитна снимка от Google Maps или друго подобно приложение). Да се импортира файлът на снимката в динамичното геометрично приложение за чертане GeoGebra .
4. Да се въведе и дефинира подходящ мащаб и да се разположи снимката/ импортирания файл в първи квадрант на координатната система.
5. Да се отбележи на чертежа, чрез геометричния обект „точка“, всички налични обекти, съответстващи на избраната област на интереси (ако ученикът е избрал да построи нов магазин, да се отбележат всички налични магазини в избрания периметър). Координатите на всички обекти трябва да са ясни и изрично описани в графичната и текстовата част на проекта.
6. Да се раздели работната повърхност на клетки – да се построи диаграмата на Вороной.
7. Да се определи мястото на новия обект.
8. Изчислете радиуса на кръга, определящ периметъра на обхват (на покритие) на вашия обект.

II етап: Описване на проекта

Изисквания за техническо оформление на реферата: Проектът трябва да има заглавна страница, съдържаща темата, подтемата на проекта, името, класа и номера на ученика. Текстовата част, заедно с графики, таблици, диаграми (ако е приложимо) не трябва да надвишава 10 страници, като този обем не включва заглавната страница. Номерацията на страниците трябва да започва от втората страница (не от заглавната) на проекта. Шрифт „Times New Roman“ с размер 12, без разредка между редовете и абзаците.

Оформление на страницата: текстът да бъде разположен върху страници с нормални полета, двустранно подравнен. (Междупредметна връзка с Информационни технологии).

Задължителни абзаци в описанието на проекта:

1. Увод: Какво избрах да разгледам, защо избрах точно тази подтема, как ще структурирам изследването си. Формулиране на ясна цел на проекта.

2. Изложение: Пълно описание на математическата част, която задължително трябва да съдържа:

- Мащаб;
- Пълно математическо описание на всички геометрични обекти – точки (координати), прави (уравнения), окръжности – центрове и радиуси;
- Метод и последователност от стъпки и действия за построяване на Диаграмата на Вороной;
- Съставяне на хипотези – аргументиран анализ на приемане и отхвърляне на възможните позиции на новия обект;
- Избор на най-добро място за разположение на новия обект/сграда - анализ, аргументация.

3. Предимства и недостатъци на избраната позиция, приложимост. Поглед в бъдещето – перспективи на развитие.

4. Заключение – ученикът прави самооценка на постигане на целите, формулирани в увода. Дава обратна връзка за това, с какво разработването на проекта е повлияло върху неговото личностно развитие. (Междупредметна връзка с Български език и литература).

III Етап: Предаване и оценяване на завършения проект

• Завършеният проект трябва да бъде изпратен в pdf-формат. Срок за изпълнение и предаване: Начин на предаване: по имейл.

• Критерии за оценка на проект по геометрия в 11. клас на тема „Приложение на вектори и знания от аналитичната геометрия чрез диаграми на Вороной в реалния живот“ подтема „Диаграми на Вороной за/при“

• Всеки проект се оценява спрямо пет критерия. Крайната оценка за всяко изследване е сумата от точките за всеки критерий. Максимален брой точки – 20. Оценката от проекта се формира по формулата: Оценка = $\frac{\text{Брой точки}}{5} + 2$.

• Според изискванията на МОН, описани в Учебната програма за профилирана подготовка по математика, оценката от проекта е 15% от крайната оценка по Модул 1 – Геометрия.

IV етап: Критерии за оценяване

Критерий 1: Смесова и логическа свързаност на отделните части на реферата и организация на представените данни.

Критерият оценява организацията и последователността на представената информация в проекта. Представеното изследване е смислово и логически свързано. Разработката отговаря на поставените цели. Добре организираното изследване включва въведение, описва целта на проекта и има заключение. Подходящи графики, таблици и диаграми трябва да са разположени на подходящото място в логическата структура на проекта. Максимален брой точки – 4.

Критерий 2: Математическа терминология и означения.

Критерият оценява до каква степен ученикът е:

• използвал подходящ математически език (означения, символи, терминология). Означенията на компютър са допустими, само ако са генерирани от софтуер (не се допускат знаци като “*” за умножение или “^” за степенуване);

• дефинирани са ключови термини и променливи, когато е необходимо;

• използвани са разнообразни форми на математическо представяне като формули, диаграми, таблици, графики и модели, когато и където е подходящо;

Максимален брой точки – 4.

Критерий 3: Отдаденост към разработването на проекта (лична ангажираност).

Критерият оценява каква е степента на ангажираност на ученика при разработване на проекта, дали влага свой собствен почерк и демонстрира лично отношение към темата. Личната ангажираност може да бъде разпозната по различни начини и включва независимо или креативно мислене, представяне на математически идеи по свой собствен начин, изследване на темата от различни перспективи. Максимален брой точки – 3.

Критерий 4: Анализ и самооценка на свършената работа.

Критерият оценява как ученикът анализира и оценява проекта. Анализът и самооценката могат бъдат периодични, след приключване на всеки етап от плана на разработката или да бъдат направени в заключението на проекта. За постигане на максимален брой точки по този критерий е необходимо допълнително, задълбочено осмисляне на значимостта и приложимостта на резултатите, постигнати чрез разработването на проекта. Някои начини за показване на адекватна самооценка са: разглеждане на допълнителни фактори, влияещи върху правилното разположение на избора от ученика точка-обект – големина на квартала, престижност на квартала (социална принадлежност на населението, платежоспособност и т. н.), влияние на наличието на банки, молове и др, които допълнително биха допринесли за развитие на стартиращия бизнес, споделяне на разсъждения относно силните и слабите страни на подходите и разглеждане на различни перспективи. Максимален брой точки – 3.

Критерий 5: Степен на приложение на математически знания и умения при разработването на проекта.

Критерият оценява до каква степен учениците използват уместни математически знания и умения в реферата си. От обучаемите се изисква да представят проект, който адекватно отразява част от компетентностите, придобити в рамките на учебната програма на Модул 1 – Геометрия, към момента на изготвянето на проекта. Максимален брой точки – 6.

V етап: Резултати

Списък на подтемите, избрани от учениците за техните проекти:

Таблица 2. Темы на някои проекти

1	Диаграми на Вороной при избиране на благоприятно местоположение за отваряне на бизнес обект - школа по английски език и други чужди езици в град Гуанджоу в Китай
2	Диаграми на Вороной за най-подходящо място за отваряне на цветарница във Венеция, Италия
3	Откриване на моя школа за народни танци в гр. Варна
4	Диаграми на Вороной при развитието на бизнес идея за отварянето на ресторант в град Варна, град Благоевград
5	Приложение на вектори и знания от аналитичната геометрия чрез диаграми на Вороной при отваряне на цветарски магазин на остров Тенерифе, Испания.
6	Най-доброто разположение на библиотеки спрямо броя на равноотдалечени училища в кв. Център на град София
7	Диаграми на Вороной за създаването на сладкарница в град Пловдив
8	Диаграма на Вороной за ресторанти със звезда Мишлен в Манхатън, Ню Йорк, САЩ
9	Диаграми на Вороной за разположението на училищата в Барселона, Испания
10	Оптимално местоположение за агенция за дигитална и рекламна графика в София
11	Диаграми на Вороной за намиране на най-оптималната локация на фитнес в града Дортмунд, Германия
12	Построяването на паркинг в областта на Айфеловата кула в Париж

13	Най-доброто място за построяване на нова бръснарница в град Валенсия спрямо диаграми на Вороной
14	Диаграми на Вороной за Зали за спортно катерене в Сиатъл
15	Построяване на нов тенис корт в Берлин
16	Намиране на оптимално местоположение за нова пекарна в Щутгарт
17	Диаграми на Вороной за най-подходящо място за откриване на плувен басейн в Малмьо, Швеция
18	Определяне на подходящо място за нова аптека в гр. Велико Търново
19	Диаграми на Вороной за намиране на най-добро местоположение на нов музей в Ница, Франция
20	Диаграми на Вороной за намиране на най-печелившото място за книжарница в центъра на град Горна Оряховица

Оценяване на проектите:

Таблица 3. Среден успех на учениците по критерии и по оценки

Критерии	K1 - 4 точки	K2 - 4 точки	K3 - 3 точки	K4 - 3 точки	K5 - 6 точки	Оценка – точки	Трансформирана оценка по шесто- балната система
Среден успех	2,98	2,95	2,50	2,61	4,39	15,43	5,09

Анализ на резултатите

Основни наблюдения, отчетени при проверката на проектите

1. Учениците от първата група за първи път получават проектна задача по математика, в следствие на което се разпознават два типа нагласи за справяне със задачата:

- Ученици, които успешно прилагат знанията и уменията си по български език и литература, информатика и информационни технологии в математиката. Това са учениците, които показват висока ангажираност, изразяват ясно позицията си по поставените въпроси в своите разработки, анализират критично приложимостта на моделите.
- Ученици, които се страхуват да изразят лично мнение и се придържат към фактите. Тези ученици представят проекти, в които отсъства логическа свързаност и анализ на отделните части на разработката. Част от тях осъзнават, че по този начин ощетяват продукта си и се опитват да го обогатят чрез кратки приложения, разработени на различни програмни езици (Java, C#), подпомогнати от програми с изкуствен интелект. Приложенията не са описани в проекта, представен е кодът, който е използван. При поискване за оценяване са демонстрирани пред класа – свързани са с изчисляване на дължини на отсечки (вектори) при задаване на координатите на точките, явяващи се начало и край на вектора.

2. Една част от учениците използват програми и приложения с изкуствен интелект за съставяне и оформяне на текстовата презентация на проекта – в указанията и критериите не се споменава подобна възможност или изискване.

3. Някои ученици не са обърнали достатъчно внимание на техническите параметри при оформлението на текста (приложили са едностранно подравняване, не са спазили големината на шрифта, не са надписали графиките и таблиците). В някои реферати не е спазен научният стил на изказ (високопарни думи, звучащи неестествено и неясно).

4. Голяма част от учениците са използвали инструмент за чертане на диаграма на Вороной, заложен в приложението GeoГebra (GeoGebra), което при оценяването е отчетено като неспазване на указанията.

VI етап: Заключителен

Състои се в организирано представяне на петте най-стойностни (съответно и най-високо оценени) проекта на учениците от първата група пред учениците от втората група.

Предварително очертани цели на представянето:

- Да мотивира и окуражи учениците от втората група;
- Да се придаде допълнителна стойност и да се осмисли труда на избраните ученици от първата група.

Втора група – ученици от първи гимназиален етап.

Етапи на реализиране на поставените цели и произтичащите от тях задачи.

Дейности на учителя при запознаване на учениците с изискванията към проекта

Предмет/предметна област

Предметът е Приложна математика, предметна област Математика. Целта на изучаването на Приложна математика е учениците да бъдат запознати с математически методи и тяхното приложение в други научни области и в решаването на проблеми от реалния живот.

Обучението по предмета е реализирано и финансирано от Национална програма „Иновации в действие“, модул 1, „Нови учебни предмети, модули и интердисциплинарно учене“.

При реализиране на целите, новите знания и умения са приложени от учениците в разработване на индивидуални проекти – съставяне на математически модели. Темите на проектите са избрани от самите ученици и предопределени от областта на интереси на всеки ученик – спорт, друга научна област, танци, музика и др.

Предварителен етап

Запознаване на учениците с общата структура на проекта, примери. План за развитие на проекта:

1. Предварително проучване на проблема – учениците откриват наличните научни източници на достоверна информация по избраната тема.
2. Съставяне на модели – на основание теоретичната обезпеченост на проекта учениците съставят техни собствени модели.
3. Проверка и научно изследване на моделите чрез приложение на изучените математически методи – учениците достигат до изводи за приложимост на моделите, които са създали.
4. Избор на най-подходящ модел – в зависимост от развитието на конкретния проект на всеки ученик, тази стъпка може да има различна интерпретация.
5. Кратка самооценка на работата на разработчика на модела – описват се всички предимства и недостатъци на изследването и резултатите от него.
6. Изводи – приложимост на модела; самооценка на постигнатите резултати.

Обучение – в рамките на един учебен срок учителят запознава учениците с математическите знания, които биха могли да бъдат приложени при разработването на проекта.

Таблица 4. Учебен материал по теми

Теми
Диаграми на Вороной
Афинни операции с вектори. Скаларно произведение на два вектора. Линейна зависимост и независимост на вектори.
Матрици. Определение. Основни понятия. Видове матрици.
Действия с матрици. Елементарни преобразувания на матрици. Детерминанти. Намиране на детерминанти от 2, 3 и по-висок ред.
Решаване на системи линейни уравнения – матрични уравнения.
Решаване на системи уравнения чрез формули на Крамер.
Елементарни функции – графики и свойства.

Основни етапи при разработване на проекта:

I етап: Подготвителен

Паралелно с въвеждането и затвърждаване на планирания учебен материал се извършват и следните дейности:

1. Избор на тема на проектната задача. Разглеждане на възможности за математическо моделиране на проблем от реалния живот. Дискусия по групи.
2. Съставяне на план за изпълнение на проектната задача (ChatGPT, Claude, BgGPT).
3. Търсене и подбор на информация по избраната тема, достоверност на източниците. Анализ и синтез на данните. Насочено е вниманието към използване на Perplexity.ai и Gemini.
4. Особенности и методи за ефективна работа с програми и приложения с изкуствен интелект, поставени са етични граници при ползването им. Дискусия.
5. Как да бъдат представени резултатите, как да бъдат описани предимствата и недостатъците от направеното изследване? Как да бъдат формулирани изводите и какви могат да бъдат те? Дискусия.
6. Как се пише реферат. Междупредметна връзка с БЕЛ.
7. Представяне на подбрани проекти на ученици от първата група пред ученици от втората група.
8. Проектна задача – представяне на темата и плана пред класа.

II етап: Критерии за оценяване на проектната задача

Оценяването на проектната задача е обвързано със степента на изпълнение на дейностите от Плана за развитие на проекта. Всяка от шестте стъпки в плана има пет степени на удовлетвореност на изпълнението и всяка степен на удовлетвореност дава определен брой точки.

Таблица 5. Критерии за оценяване

Етап	Степен на удовлетвореност	Брой точки
1. Предварително проучване на проблема	Недостатъчност – повърхностен подход при предварително проучване на проблема.	2
	Удовлетворява необходимият минимум, но не е достатъчно.	3
	Удовлетворява необходимият минимум. Задоволително ниво на проучване на проблема.	4
	Проблемът е добре проучен, събрана е необходимата информация за целите на проекта и е приложена за разработване на много добър проект.	5
	Събрана е достатъчно информация при проучване на проблема, която е подходящо използвана на реализиране на проекта, представени са допълнителни данни, които обогатяват проекта и са в контекста му.	6
2. Съставяне на модели	Недостатъчност – повърхностен подход при съставяне на модел/и. Моделът не е аргументиран.	2
	Удовлетворява необходимият минимум, но не е достатъчно. Моделът е аргументиран неубедително.	3
	Удовлетворява необходимият минимум. Задоволително ниво описание и аргументация на модела/ите.	4
	Формулирани и много добре аргументирани модели.	5
	Формулираните модели са отлично аргументирани – използван е пълният инструментариум от математически методи, изучени по предмета и допълнителни такива, които ученикът е научил чрез самоподготовка.	6

3. Проверка и научно изследване на моделите чрез приложение на изучените математически методи	Недостатъчно	2
	Удовлетворява минимума.	3
	Задоволително.	4
	Много добро.	5
	Отлично, надвишаващо максималните очаквания.	6
4. Избор на най-правдо-подобен модел	Недостатъчно.	2
	Удовлетворява минимума.	3
	Задоволително.	4
	Много добро.	5
	Отлично, надвишаващо максималните очаквания.	6
5. Кратка самооценка на модела от страна на ученика	Недостатъчно.	2
	Удовлетворява минимума.	3
	Задоволително.	4
	Много добро.	5
	Отлично, надвишаващо максималните очаквания.	6
6. Изводи – предимства и недостатъци, приложимост на модела.	Недостатъчно.	2
	Удовлетворява минимума.	3
	Задоволително.	4
	Много добро.	5
	Отлично, надвишаващо максималните очаквания.	6

Оценка: 0 – 17 т. Слаб 2; 18 – 21 т. Среден 3; 22 – 27 т. Добър 4; 28 – 32 т. Мн. добър 5; 33 – 36 т. Отличен 6.

III етап: Резултати

Списък от темите, избрани от някои ученици за техните проекти.

Таблица 6. Темите на някои от проектите

1	„Употреба на матриците в приложения за персонализирани препоръки за музика“
2	„Матрици и функции в анимациите“
3	„Изследване влиянието на светлинното замърсяване върху звездната видимост“
4	„Анализ и оптимизация на логистични вериги чрез теория на графите“
5	„Шифърът на Хил“
6	„Математиката в разкриването на серийни убийства“
7	„Изчисляване на нужния брой болнични легла на база разпределение между болни и здрави хора при определен процент заболяемост“
8	„Анализ на съдебни решения чрез математически действия с матрици и статистически методи“
9	„Най-добро място за построяване на зоопарк в България“
10	„Ефективен модел за градски транспорт на ученици в гр. Поморие“
11	„Матриците в 3D пространството“
12	„Анализ на разпределението на къщите в градска среда с помощта на математически методи“
13	„Използване на матриците в музиката“
14	„Планиране на транспортен маршрут чрез матрици. Намиране на най-кратък път“
15	„Релация: Образование-Изкуство-Култура“
16	„Използване на диаграми на Вороной за откриване на най-добра формация във футбола“
17	„Износването на скоростните кутии на болид от Формула 1, представено чрез матрици“
18	„Проектиране на безопасни изходни зони в моторни спортове чрез диаграми на Вороной“
19	„Приложение на функции във футбола“
20	„Математиката в хореографията и преходите между танцови фигури – кръг и редица“
21	„Изследване на връзката между темпото (BPM) и продължителността на хитовите песни през годините“
22	„Как промяната на цената на какаото влияе върху себестойността на шоколадовите десерти“

23	„Анализ на социални мрежи“
24	„Оптимален маршрут и време за пътуване в градска среда“
25	„Матрици в компютърните графики“
26	„Математиката в танците“

Оценяване на проектите:

Таблица 7. Среден успех на учениците по критерии и по оценки

Критерии	K1 - 6 точки	K2 - 6 точки	K3 - 6 точки	K4 - 6 точки	K5 - 6 точки	K6 - 6 точки	Оценка – точки	Трансформирана оценка по шестобалната система
Среден успех	5,1	5	4,8	4,75	4,63	5,26	29,54	4,92

Обобщение на резултатите от двете задания. Качествен анализ на данните

1. Източници на данните, използвани за провеждането на качествения анализ

Изготвено е портфолио на всеки ученик, в което са отразени данни от наблюдение, свързани със следните етапи от създаване на проектите: взаимодействие на учениците с програми и приложения с изкуствен интелект (критично мислене); работа с динамичната програма GeoGebra (геометрично представяне на данните – отразява се дали уменията на учениците търпят развитие); самооценка на извършените дейности от учениците (съдържа се във всеки реферат); разговори с всеки ученик, целящи да се установи нивото на мотивация, както и да се обсъдят индивидуалните затруднения, които среща.

2. Тематичен анализ на данните

Категоризирани са повтарящите се явления и е проследена динамиката на тяхното изменение. Структурирани са наблюденията в модели на поведение на учениците по отношение на: когнитивно развитие, технологична грамотност, афективни резултати (удовлетвореност, ангажираност).

3. Интерпретация и валидиране на резултатите

Резултатите в таблицата се основават на поставените оценки/точки по съответните критерии, представени в проектите.

Таблица 8. Качествен анализ на данните

Категория	Индикатор	Успеваемост (%) (средно за двете групи)
Креативност	Генериране на нестандартни решения.	77,5
Ангажираност	Вложен е собствен почерк, изразено е лично отношение.	82,5
Математически умения	Активно и адекватно прилагане на математически знания и умения при решаване на практическа задача.	76,5
Технологична грамотност	Управлява, оценява и разбира съвременните дигитални програми и приложения безопасно, ефективно и критично.	80,5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решаването на задачи от реалния живот чрез знания и умения от математиката е интересен и вълнуващ процес, както за учениците, така и за учителя. Прилагането на проектно-базираното обучение в двете групи доведе до усъвършенстване на уменията за критично мислене, повишаване на ангажираността и мотивацията, подобряване на способностите за управление на времето и развитие на метакогнитивни умения, следвайки индивидуалните потребности и собствения темп на развитие на всеки ученик. Методът спомогна за развиване на умения за решаване на сложни проблеми от реалния живот, насърчи творческото мислене и доведе до иновативни решения и уникални гледни точки.

Интегрирането на програми и приложения с изкуствен интелект създаде търсения баланс между познавателните потребности на обучаемите и целите и задачите на математиката. Съчетаването на проектно-базираното обучение с LLM програми неутрализира негативното им влияние при прекомерна и безконтролна употреба – намаленото когнитивно натоварване и ангажираност в задълбочени аналитични процеси. [10]

Разработването на проекти по теми, значими за учениците и отговарящи на истински нужди, породява чувство за цел и смисъл, повиши удовлетвореността от обучението и ангажираността с учебния процес. При многократното представяне на проектите пред различна аудитория учениците развиваха ораторски умения и преодоляваха психологическата бариера да представят себе си и творческите си продукти.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белоев, Х., Смрикаров, А., Иванова, А. (2021). Наръчник по иновационни образователни технологии. // Beloev, H., Smrikarov, A., Ivanova, A. (2021). Narachnik po inovatsionni obrazovatelni tehnologii. <https://www.mon-nmuciot.bg/virtualLibrary.html>.
- [2] Василева, М. Поколение Алфа. i-Продължаващо образование. // Vasileva, M. Pokolenieto Alfa. i-Prodalzhavashto obrazovanie. Последно посетен на 27 март 2026 г.: <https://journal.deo.uni-sofia.bg/14220/>.
- [3] Концепция за промяна на учебните програми по математика. // Kontseptsia za promyana na uchebnite programi po matematika. <https://www.mon.bg/project-document/konczepczyia-za-promyana-na-uchebnite-programi-po-matematika/>.
- [4] Дженеро, И. Синдео. (2025). Изкуствен интелект в образованието – за или против. // Dzhenero, I. Sindeo. (2025). Izkustven intelekt v obrazovanieto – za ili protiv. <https://sindeo.org/izkustven-intelekt-v-obrazovanieto/>.
- [5] Egara, F. Mosimege, M.D. (2024). Exploring the Integration of Artificial Intelligence-Based ChatGPT into Mathematics Instruction: Perceptions, Challenges, and Implications for Educators, Education sciences, 2024. <https://www.mdpi.com/2227-7102/14/7/742>.
- [6] Gemini Google AI, <https://gemini.google.com/app>
- [7] МОН. (2025). Изкуственият интелект в образованието и науката: Идеи за развитието и използването на ИИ в образованието и науката в Република България. // MON. (2025). Izkustveniyat intelekt v obrazovanieto i naukata: Idei za razvitiето i izpolzvaneto na II v obrazovanieto i naukata v Republika Bulgaria. https://leadthesuccess.eu/file/file/download?guid=fca8c137-afa8-440c-ab52-3570be1939ad&hash_sha1=aaa42422.
- [8] Kosmyna, N., Hauptmann, E., Yuan, Y. T., Situ, J. Liao, X., Bereznitzki, A., Braunstein, I., Maes, P. (2025). Your Brain on ChatGPT: Accumulation of Cognitive Debt when Using an AI Assistant for Essay Writing Task, arXiv:2506.08872. DOI: 10.48550/arXiv.2506.08872
- [9] Образование без раници. (2025). Българските учители все по-често използват изкуствен интелект в работата си. // Obrazovanie bez ranitsi. (2025). Balgarskite uchiteli vse po-chesto izpolzvat izkustven intelekt v rabotata si. <https://obr.education/ai-bulgarian-schools/>.
- [10] Risko, E. F., Gilbert, S. J. (2016). Cognitive offloading. Trends in cognitive sciences, vol. 20, no. 9, pp. 676-688. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1364661316300985>.
- [11] Voronoi diagrams, <https://www.youtube.com/watch?v=3hmAUsVRWRM>.
- [12] OpenAI. ChatGPT, <https://chatgpt.com>
- [13] Anthropic. Claude, <https://claude.ai>
- [14] INSAIT. BgGPT, <https://bgpt.bg>
- [15] GeoGebra. Динамична геометрична програма за чертане. // Dinamichna geometrichna programa za chertane, <https://www.geogebra.org>
- [16] Perplexity: Perplexity AI, <https://www.perplexity.ai>

ИНФОРМАЦИЯ ЗА АВТОРА

Паунка Йорданова, доктор на Факултет „Математика и информатика“, Катедра „Математика“, Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“, E-mail: p.y.yordanova@ts.uni-vt.bg.

ABOUT THE AUTHOR

Paunka Yordanova, PhD, Faculty of Mathematics and Informatics, Department of Mathematics, St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, E-mail: p.y.yordanova@ts.uni-vt.bg.