



ВЪРХУ ГЕОМЕТРИЯТА НА ОПЕРАТОРИТЕ НА КРИВИНА, ДЕФИНИРАНИ ОТ СТАНИЛОВ

Веселин Видев

ON THE GEOMETRY OF THE CURVATURE OPERATORS DEFINED BY STANILOV

Veselin Videv

Abstract: In the presented article, we consider the curvature operators defined by Stanilov and derive results related to one of them. A main problem in studying Riemannian manifolds with the indicated curvature operators is a condition for point constancy of the eigenvalues of these operators, as an extension of Osserman's conjecture for point constancy of the Jacobi operator. The results of Stanilov, Gilkey, Videv, and their co-authors are directed in this area, and a condition for commutativity of these operators was also introduced. These studies have been the subject of several dissertations and monographs and of numerous articles, as well.

Keywords: Stanilov operators, Jacobi operator, pointwise constant Osserman manifolds.

ВЪВЕДЕНИЕ

Централна роля в модерната диференциална геометрия има тензорът на кривина R за произволно гладко Риманово многообразие (M, g) , с метрика g , който е фундаментален обект за многообразието и който се дефинира чрез уникалната за многообразието свързаност на Леви-Чивита ∇ , която е единствената симетрична свързаност запазваща метриката g на многообразието (M, g) . С помощта на този тензор е възможно да се характеризираме многообразието алгебрично, геометрично и топологично. Фундаментален въпрос в съвременната диференциална геометрия на многообразието е въпросът по зададен тензор на кривина за произволно гладко многообразие да се определи метриката на многообразието с точност до изометрия. В общия случай този въпрос няма задоволителен отговор в световната литература досега, поради което е важно да се класифицират и опишат с точност до изометрия Римановите многообразия със специални нетривиални тензори на кривината, като например Римановите симетрични пространства описани от Картан и други. При решаването на този въпрос голям интерес предизвикват различни оператори на кривина, естествено свързани с тензора на кривина, за дадено Риманово многообразие (M, g) , които се дефинират като линейни изображения на допирателното пространство M_p към многообразието, в произволна точка $p \in M$, като обикновено имаме пред вид селф-дуални и анти селф-дуални линейни оператори. В световен мащаб редица автори работят по операторите на кривина и свързани с тях проблеми, като основа в тези изследвания е произволно гладко n -мерно Риманово многообразие (M, g) , с метрика g и тензор на кривината R . Ако p е произволна точка от многообразието M и ако M_p е тангенциалното пространство към многообразието в тази точка, тогава Римановият тензор на кривина R за многообразието (M, g) се дефинира като линеен ендоморфизъм на допирателното пространство M_p , чрез равенството:

$$R_{x,y}(z) := R(x,y,z) = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla [x,y] z,$$

където ∇ е еднозначно определената от метриката g свързаност на Леви-Чивита, а $[.,.]$ е комутаторът на Ли [5]. Паралелно с Римановото многообразие (M,g) може да се разглеждат модели от вида (M_p, g_p, R_p) , дефинирани във всяка точка p от многообразието M , чрез метриката и кривината на многообразието, като в по-общ план се разглеждат само алгебрични модели от вида (V,g,R) . По дефиниция, ако g е неизродена билинейна форма със сигнатура (p,q) , дефинирана върху крайномерното реално векторно пространство V и ако $R \in \oplus^4 V$ е тензор от тип $(0,4)$, тогава казваме, че наредената тройка (V,g,R) е модел, съответно R е алгебричен тензор на кривина, ако R удовлетворява следните свойства:

$$\begin{aligned} R(x,y,z,u) &= -R(y,x,z,u) = R(z,u,x,y), \\ R(x,y,z,u) + R(y,z,x,u) + R(z,x,y,u) &= 0, \end{aligned}$$

второто от които се нарича първо *тъждество на Бианки*. Ако е зададен само алгебричен модел, то чрез него може да се дефинира изоморфно на модела Риманово или псевдо-Риманово многообразие (M,g) такова, че моделът (V,g,R) да съвпада с модела (M_p, g_p, R_p) , във всяка точка p от многообразието (M,g) . Това пък дава възможност да се работи едновременно в геометричен и алгебричен контекст по различни проблеми за операторите на кривина [3].

Нека (M,g) е произволно Риманово многообразие, нека p е произволна точка от M и нека M_p е допирателното пространство към многообразието в точката $p \in M$. Робърт Осерман въвежда следния оператор на Якоби [8]:

$$R_X(u) = R(u, X, X),$$

дефиниран за произволен единичен вектор $X \in M_p$, в точка $p \in M$. Многообразието за които операторът на Якоби има точково постоянни собствени стойности във всяка точка от многообразието се наричат *точково постоянно Осерманово многообразие*, а ако собствените стойности на оператора на Якоби не зависят и от точката, многообразието се нарича *глобално Осерманово многообразие* [4]. Тези многообразия се базират на следния основен резултат на Питър Гилки [3]:

ТВЪРДЕНИЕ 1

А) Нека (M,g) е точково постоянно Осерманово многообразие. Тогава тензорът на кривината R , в произволна точка от многообразието M , може да се представи във вида:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \lambda_0 (g(X,Z)Y - g(Y,Z)X) \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{s=1}^v (\lambda_s - \lambda_0) (g(J_s Z, Y) J_s X + g(J_s Z, X) J_s Y - 2g(J_s X, Y) J_s Z), \end{aligned}$$

където $J_1, \dots, J_v$ е колекция от кососиметрични ортогонални оператори в M_p , наречена структурен модул на Клифорд, удовлетворяваща релацията на Хурвиц $J_s J_q + J_q J_s = 0$, $1 \leq s \neq q \leq v$, $\lambda_s \neq \lambda_q$ за $s > 0$, като тук v е първото число на Бети. При $v=0$, многообразието (M,g) е пространство с постоянна секционна кривина.

Б) Ако (M,g) е n -мерно глобално Осерманово многообразие и ако размерността n изключва възможността $n \equiv 0 \pmod{4}$, тогава (M,g) е двуточно хомогенно пространство.

Следвайки оператора на Якоби, професор Грозьо Станилов дефинира четири оператора на кривина а именно:

I. Симетричен оператор на кривина

$$(1) \quad R_{X,Y}(u) = \frac{1}{2} [R(u, X, Y) + R(u, Y, X)],$$

дефиниран за произволна ортонормирана двойка вектори X, Y от допирателното пространство M_p към многообразието в точка p от Римановото многообразие (M,g) ;

II. Кососиметричен оператор на кривина

$$(2) \quad K(X,Y)(u) = R(X,Y,u),$$

дефиниран за произволна ортонормирана двойка вектори X, Y от допирателното пространство към многообразието в точка p от Римановото многообразие (M, g) ;

III. Обобщен оператор на Якоби

$$(3) \quad R(E^m)(u) = \sum_{i=1, m} R(u, X_i, X_i),$$

дефиниран за произволно m -мерно допирателно подпространство $E^m \subset M_p$, в точка $p \in M$, където $\{X_i\}_{i=1, m}$ ($m < n$) е ортонормиран базис за подпространството E^m ;

IV. Обобщен кососиметричен оператор

$$(4) \quad \mathfrak{R}(E^m)(u) = \sum_{i < j=1, m} \text{Ko}K(X_i, X_j)(u),$$

дефиниран за произволно m -мерно допирателно подпространство $E^m \subset M_p$, в точка $p \in M$, където $\{X_i\}_{i=1, m}$ ($m < n$) е ортонормиран базис в E^m .

ТВЪРДЕНИЕ 2 [3]

Операторите на Станилов не зависят от ортогонални трансформации на ортонормираните бази си в индуциращите ги подпространства.

В тази статия ще разгледаме симетричния оператор на кривина $R_{X,Y}$ като нашата цел е да характеризираме точково постоянните Осерманови многообразия чрез собствените вектори и собствените стойности на $R_{X,Y}$.

Теорема 1 [9]. Операторът $R_{X,Y}$ има два собствени вектора в площадката $E^2(p; X \wedge Y)$, тогава и само тогава когато е в сила системата равенства:

$$(5) \quad \begin{aligned} R_Y(X) &= R(X, Y, Y) = K(X \wedge Y).X \\ R_X(Y) &= R(Y, X, X) = K(X \wedge Y).Y, \end{aligned}$$

където $K(p; X \wedge Y)$ е секционната кривина на площадката $E^2(p; X \wedge Y)$.

Тази система еквивалентни равенства е известна като „дуален принцип на Ракич“ [7], дефиниран при условие, че X, Y са произволни единични вектори от тангенциалното пространство M_p , в произволна точка $p \in M$.

ТВЪРДЕНИЕ 3 [7]

Едно Риманово многообразие (M, g) удовлетворява дуалния принцип на Ракич (5), за произволни единични вектори $X, Y \in M_p$, във всяка точка $p \in M$, тогава и само тогава, когато (M, g) е точково постоянно Осерманово многообразие.

От теорема 1 и твърдение 3 получаваме следния резултат:

Теорема 2. Операторът $R_{X,Y}$ има два собствени вектора в площадката $E^2(p; X \wedge Y)$ в произволна точка $p \in M$, и за произволна ортонормирана двойка вектори X, Y от тангенциалното пространство M_p тогава и само тогава, когато (M, g) е точково постоянно Осерманово многообразие.

Теорема 3. Нека (M, g) е 4-мерно Риманово многообразие. Тогава следните условия са еквивалентни:

а) В произволна точка $p \in M$, и за произволна ортонормирана двойка вектори X, Y от тангенциалното пространство M_p , собствените стойности на всеки оператор $R_{X,Y}$ са точково постоянни във всяка точка от многообразието.

б) (M, g) е точково постоянно Осерманово многообразие.

Доказателство. Да приемем, че условие а) е в сила. Нека $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ е произволен ортонормиран базис на тангенциалното пространство M_p , в произволна точка $p \in M$. Непосредствено установяваме, че характеристичното уравнение на оператора $R_{e_1 e_2}$ с корен c , относно този ортонормиран базис се задава в следната форма:

$$\begin{vmatrix} -2c & -K_{12} & R_{1213} & R_{1214} \\ -K_{12} & -2c & R_{1223} & R_{1224} \\ R_{1213} & R_{1223} & 2R_{1332} - 2c & R_{4123} + R_{4213} \\ R_{1214} & R_{1224} & R_{4123} + R_{4213} & 2R_{1442} - 2c \end{vmatrix} = 0.$$

Съгласно направеното допускане, собствените стойности на всевъзможните оператори $R_{e_i e_j}$ ($\forall i, j=1, 2, 3, 4$) съвпадат. Като изчислим и сравним характеристичните коефициенти в аналогично получените уравнения можем да получим, че всички компоненти на тензора на кривината R , относно произволния ортонормиран базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, за тангенциалното пространство M_p , се определят чрез формулите:

$$(6) \quad \begin{aligned} K_{12} &= K_{34}, \quad K_{13} = K_{24}, \quad K_{14} = K_{23}, \\ R_{1223} &= R_{1443} = R_{1332} = R_{1442} = R_{1224} = R_{1334} = 0, \\ R_{3124} + R_{3214} &= K_{13} - K_{14}, \\ R_{4132} + R_{4312} &= K_{14} - K_{12}, \\ R_{2143} + R_{2413} &= K_{12} - K_{13}. \end{aligned}$$

Нека z е произволен единичен вектор от тангенциалното пространство M_p и нека за този вектор е в сила разлагането по базиса $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, а именно

$$(7) \quad z = a_0 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4.$$

Тогава съгласно (6) и (7), за елементите на симетричната матрица на оператора на Якоби R_z , която означаваме с $F=(f_{ij})$, относно ортонормирания базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, получаваме изразите:

$$\begin{aligned} f_{11} &= a_1^2 K_{12} + a_2^2 K_{13} + a_3^2 K_{14}, \\ f_{12} &= -a_0 a_1 K_{12} + a_2 a_3 (K_{14} - K_{13}), \\ f_{13} &= -a_0 a_2 K_{14} + a_1 a_3 (K_{12} - K_{14}), \\ f_{14} &= -a_0 a_3 K_{14} + a_1 a_2 (K_{13} - K_{12}), \\ f_{22} &= a_0^2 K_{12} + a_2^2 K_{14}, \\ f_{23} &= a_0 a_3 (K_{13} - K_{12}) - a_1 a_2 K_{14}, \\ f_{24} &= a_0 a_2 (K_{12} - K_{14}) - a_1 a_3 K_{13}, \\ f_{33} &= a_0^2 K_{13} + a_1^2 K_{14}, \\ f_{34} &= a_0 a_1 (K_{14} - K_{13}) - a_2 a_3 K_{12}, \\ f_{44} &= a_0^2 K_{14} + a_1^2 K_{13} + a_2^2 K_{14}. \end{aligned}$$

Сега характеристичното уравнение на оператора на Якоби R_z , може да се представи в следната форма

$$(8) \quad \det (C - \lambda(p; z)E) = \det (A^{-1}CA - \lambda(p; z)E) = 0,$$

където $\lambda(p; z)$ е корен на това уравнение, съответно A и C са следните матрици:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{14} \end{pmatrix}.$$

Уравнението (8) може да се запише още във вида

$$\lambda(p; z)(\lambda(p; z) - K_{12})(\lambda(p; z) - K_{13})(\lambda(p; z) - K_{14}) = 0.$$

Оттук следва, че за собствените стойности на оператора на Якоби R_z имаме

$$\lambda_0(p; z) = 0, \quad \lambda_1(p; z) = K_{12}, \quad \lambda_2(p; z) = K_{13}, \quad \lambda_3(p; z) = K_{14},$$

което съгласно произволността на единичния вектор $z \in M_p$ и фиксираните вектори $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ означава, че собствените стойности на всеки оператор на Якоби Rz са точково постоянни функции и следователно (M, g) е точково постоянно Осерманово многообразие.

Да приемем, че условие б) е в сила. Тогава е в сила твърдение 3 от което следва, че са в сила равенства (5) за операторите на Якоби R_X и R_Y , и за произволна ортонормирана двойка вектори X, Y от тангенциалното пространство M_p , в произволна точка $p \in M$. В сила е също така теорема 1 от която и свойствата на тензора на кривина R [5] следва

$$\begin{aligned} R_{X,Y} \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \right) &= \frac{1}{2} \left[R \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, X, Y \right) + R \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, Y, X \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [R(Y, X, Y) + R(X, Y, X)] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} [R(X, Y, Y) + R(Y, X, X)] \\ &= -\frac{1}{2} [K(X \wedge Y) \cdot \frac{X+Y}{\sqrt{2}}], \\ R_{X,Y} \left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}} \right) &= \frac{1}{2} \left[R \left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, X, Y \right) + R \left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, Y, X \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [-R(Y, X, Y) + R(X, Y, X)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [R(X, Y, Y) - R(Y, X, X)] \\ &= \frac{1}{2} [K(X \wedge Y) \cdot \frac{X-Y}{\sqrt{2}}]. \end{aligned}$$

От тези равенства имаме, че единичните вектори $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ са собствени вектори на оператора на кривина $R_{X,Y}$ със съответни собствени стойности $-\frac{1}{2}K(X \wedge Y), \frac{1}{2}K(X \wedge Y)$, за произволна ортонормирана двойка вектори X, Y от тангенциалното пространство M_p , в произволна точка $p \in M$. Обаче, съгласно твърдение 3 и равенства (5) тези собствени стойности са точково постоянни функции в произволна точка $p \in M$. Останалите собствени стойности на оператора на кривина $R_{X,Y}$ са равни на нула и съответстват на собствени вектори ортогонални на $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$, понеже собствените вектори на $R_{X,Y}$ образуват ортонормиран базис за тангенциалното пространство M_p , в произволна точка $p \in M$.

Нека π е k -мерно подпространство на тангенциалното пространство M_p , в произволна точка p от Римановото многообразие (M, g) , и нека $e_1, e_2, \dots, e_k$ е произволен ортонормиран базис за π . Тогава операторът на кривина (1) може да се обобщи чрез равенството

$$R_\pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k g(e_i, e_j) R_{e_i e_j}.$$

Този оператор на кривина, който с обобщението (M, g) да бъде псевдо-Риманово многообразие, както и с допълнителното включване на метриката g , на многообразието (M, g) , е основа при разрешаването на различни проблеми свързани с операторите на кривина, разгледани в монографията на Питър Гилки [3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] **Gilkey P., Stanilov G., Videv V. (1998).** Pseudo-Riemannian manifolds whose generalized Jacobi operator has a constant characteristic polynomial. *Journal of Geometry* (Basel), 62, 144-153.
- [2] **Gilkey P., Nikčević S. and Videv V. (2004).** Manifolds which are Ivanov-Petrova or k-Stanilov. *Journal of Geometry*, 80, 82-94.
- [3] **Gilkey P. (2007).** The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds. Imperial College Press. ISSN 1753-657. Series Editor: Dennis Barden.
- [4] **Gilkey P., Swann A. and Vanhecke L. (1995).** Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator. Joint with Swann and Vanhecke. *Quart J Math. Oxford* 46, 299-320.
- [5] **Kobayashi S., Nomizu K. (1969).** Foundations of differential geometry. vol. 1. Interscience Publish. New York-London.
- [6] **Kowalski O., Tricerri F. and Vanhecke L. (1992).** Curvature homogeneous Riemannian manifolds. *J.Math.Pures appl.* 71, 471-501.
- [7] **Nikolayevsky Y., Zoran Rakić. (1990).** A note on Rakic Duality principle for Osserman manifolds. *Publications de l'Institut Mathematique, Nouvelle série, tome 94* (108);
- [8] **Osserman R. (1990).** Curvature in the eighties. *Journal Amer. Math. Monthly*, vol. 97, 731-756.
- [9] **Videv V. (1993).** A characteristic of the real space forms by a linear operator. Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria, Scientific Works-Mathematics, vol.30.
- [10] **Videv V. (1998).** Characterization of Petrov's manifolds using a skew-symmetric Stanilov curvature operator. *Mathematics and Education in Mathematics*, 173-177.

ИНФОРМАЦИЯ ЗА АВТОРА

Проф. дмн Веселин Тотев Видев, катедра „Информатика и математика“, Тракийски университет, гр. Стара Загора, email: veselin.videv@trakia-uni.bg

ABOUT THE AUTHOR

Prof. Veselin Totev Videv, PhD, DSc, Department of Informatics and Mathematics, Trakia University, Stara Zagora, email: veselin.videv@trakia-uni.bg